

面向变压器叠片铁心涡流损耗评估的快速高精度多尺度计算方法

马新宇¹, 段娜娜¹, 慕小斌²

(1. 西安交通大学电气工程学院, 710049, 西安;

2. 中国电力科学研究院有限公司先进输电技术全国重点实验室, 102209, 北京)

摘要: 为满足高效节能变压器设计中叠片铁心涡流损耗快速、准确评估的需求, 针对传统有限元法精细建模计算量大、现有多尺度有限元法因富集函数缺乏物理针对性而导致局部涡流场及损耗计算误差较大的问题, 提出一种基于本征函数先验知识的变压器叠片铁心涡流损耗快速高精度多尺度计算方法。首先, 根据矢量磁位在叠片区域内满足的双曲余弦分布特征, 提取能够反映叠片内部场量变化规律的本征函数, 并将其作为先验信息引入多尺度有限元框架。然后, 结合水平集函数与单位分解法, 构造能够刻画材料交界面及边缘集肤效应区域非线性场量变化的富集函数, 实现叠片铁心局部涡流场的低自由度求解; 在此基础上, 根据涡流密度分布计算局部涡流损耗密度及单位长度涡流损耗。最后, 以模拟变压器局部叠片铁心电磁行为的二维线圈-叠片模型进行验证。结果表明: 以传统有限元法在精细剖分下的计算结果为基准, 所提方法在网格节点数和自由度分别减少 97.99% 和 97.41% 的条件下, 计算时间由 628 s 降至 51 s, 缩短 91.88%; 与原有多尺度有限元法相比, 在相同粗网格条件下, 所提方法使矢量磁位平均相对误差降低 98.80%, 单位长度涡流损耗相对误差降低 96.77%。研究结果表明, 所提方法能够在极低网格密度下同时降低计算规模、缩短计算时间并提高局部场量与涡流损耗计算精度, 可为变压器叠片铁心涡流损耗评估及精细化电磁分析提供高效计算工具。

关键词: 变压器; 叠片铁心; 涡流损耗; 多尺度有限元法; 富集函数

中图分类号: TM153 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2026)00-0000-00

A Fast and High-Accuracy Multiscale Computational Method for Eddy-Current Loss Assessment in Transformer Laminated Cores

MA Xinyu¹, DUAN Nana¹, MU Xiaobin²

(1. School of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049, China; 2. National Key Laboratory of Advanced Power Transmission Technology, China Electric Power Research Institute Co., Ltd., Beijing 102209, China)

Abstract: To meet the demand for fast and accurate eddy-current loss assessment in laminated cores for energy-efficient transformer design, this paper proposes a fast and high-accuracy multiscale computational method based on eigenfunction-informed prior knowledge. The method addresses the high computational cost of refined modeling in the conventional finite element method (FEM), as well as the relatively large errors in local eddy-current field and loss calculations caused by the lack of physical relevance in the enrichment functions used in existing multiscale finite element methods (MSFEMs). First, according to the hyperbolic-cosine distribution characteristic satisfied by the magnetic vector potential in the laminated region, an eigenfunction capable of representing the field variation inside the laminations is extracted and introduced into the MSFEM framework as prior information. Then, by combining the level-set function with the partition of unity method, an enrichment function is constructed to characterize the nonlinear field variation near material interfaces and edge skin-effect regions, enabling a low-degree-of-freedom solution of the local eddy-current field in the laminated core. On this basis, the local eddy-current loss density and the eddy-current loss per unit length are calculated from the eddy-current density distribution. Finally, the proposed method is validated using a two-dimensional coil-lamination model that represents the local electromagnetic behavior of a transformer laminated core. The results show that, using the fine-mesh FEM result as the reference, the proposed method reduces the number of mesh nodes and degrees of freedom by 97.99% and 97.41%, respectively, while reducing the computational time from 628 s to 51 s, corresponding to a reduction of 91.88%. Compared with the original MSFEM under the same coarse-mesh condition, the proposed method reduces the average relative error of the magnetic vector potential by 98.80% and the relative error of the eddy-current loss per unit length by 96.77%. These results demonstrate

收稿日期: 2026-05-08。 作者简介: 马新宇 (1997—), 男, 博士生; 段娜娜 (通信作者), 女, 副教授, 博士生导师。基金项目: 智能电网国家科技重大专项资助项目 (2026ZD0812500)。

网络出版时间: 网络出版地址:

that the proposed method reduces the computational scale and time while improving the accuracy of local field calculation and eddy-current loss assessment under an extremely low mesh density, providing an efficient computational tool for eddy-current loss assessment and refined electromagnetic analysis of transformer laminated cores.

Keywords: transformer; laminated core; eddy-current loss; multiscale finite element method; enrichment function

变压器是输配电系统中的关键基础装备,其损耗水平直接影响电网运行经济性和能源利用效率。随着高效节能变压器推广及能效限定值、能效等级标准的实施,变压器设计对损耗控制、温升评估、结构参数优化和计算迭代效率提出了更高要求^[1-2]。铁心作为变压器电磁能量转换的核心部件,是空载损耗的重要来源,其局部磁场分布和涡流损耗不仅影响变压器能效指标,也可作为后续温升分析和热可靠性评估的重要热源输入^[3-5]。因此,面向高效节能变压器设计需求,发展快速、准确的叠片铁心涡流损耗评估方法具有重要工程意义。

变压器铁心通常由硅钢片与绝缘层交替叠压而成,并在接缝、搭接、边缘和转角等区域形成复杂局部结构。硅钢片厚度、绝缘层参数、叠片方式和接缝形式等设计及制造因素,会改变铁心内部磁通分布和涡流路径,进而影响局部涡流损耗密度及损耗集中现象^[6-8]。特别是在材料交界面和叠片边缘区域,磁场可能出现局部畸变,涡流场受集肤效应影响呈现明显非线性分布。由于涡流损耗评估依赖于局部涡流密度及其空间分布,若不能准确刻画上述局部场量,将影响涡流损耗评估及热源分布判断,进而削弱铁心结构优化结果的可靠性。

传统有限元法(FEM)可通过逐层离散硅钢片与绝缘层获得较高计算精度,但变压器铁心整体尺寸与单片叠片厚度之间存在显著尺度差异。若在工程尺度模型中直接解析每层叠片及其边缘区域,将导致网格数量和系统自由度急剧增加,难以满足多方案、多工况设计迭代的效率要求。为降低计算规模,已有研究采用等效磁导率、等效电导率、复磁导率、数值均质化及准三维计算等方法对叠片铁心进行建模,以避免对叠片结构进行逐层精细剖分^[9-13]。该方法能够提高整体计算效率,但其主要面向等效建模、宏观场量或特定损耗分量计算,对叠片内部、材料界面和边缘集肤效应区域的局部场量计算能力仍有限。

多尺度有限元法(MSFEM)为密集薄层结构电磁场计算提供了有效途径。该方法通过在宏观粗网格上引入包含细尺度信息的富集函数,在避免逐层精细剖分的同时提高局部场量逼近能力^[14]。针对叠片铁心涡流问题,Hollaus、Schöberl等构造了表征叠片周期特征的多尺度格式,并拓展至三维涡流和磁滞问题^[15-18];Duan等基于扩展有限元思想构造富集函数,放松了网格必须贴合材料界面的约束^[19-21]。然而,现有多尺度方法的计算精度高度依赖富集函数

构造方式。基于周期假设的多尺度格式在复杂局部结构或强集肤效应区域适用性受限;基于材料界面识别的富集函数虽具有较好通用性,但其对叠片内涡流场特征分布规律的显式利用仍不充分,往往需要提高函数阶次或增加自由度以改善精度,导致计算效率与局部精度难以兼顾。

鉴于此,本文提出一种基于本征函数先验知识的快速高精度多尺度计算方法。该方法从矢量磁位在叠片内满足的双曲余弦分布型本征函数出发,将其作为物理先验信息引入多尺度有限元框架;进而结合水平集函数与单位分解法,构造能够刻画材料交界面及边缘集肤效应区域非线性场量变化的富集函数。在此基础上,根据计算所得涡流密度进一步评估局部涡流损耗密度及涡流损耗。最后,以一个二维线圈-叠片模型为算例,通过与传统有限元法在精细剖分下的计算结果和原有多尺度方法对比,验证所提方法用于变压器叠片铁心涡流损耗快速、准确评估的有效性。

1 叠片铁心涡流损耗评估的多尺度有限元基础

1.1 涡流损耗评估与多尺度有限元思想

叠片铁心涡流损耗通常由导电区域内的局部涡流密度或电场强度积分得到,其评估精度取决于叠片内部、材料交界面及边缘集肤效应区域的局部场量计算精度。对于由硅钢片与绝缘层交替叠压形成的铁心结构,传统有限元法逐层离散会导致网格数量和系统自由度急剧增加。因此,在保证局部精度的同时降低离散规模,是叠片铁心涡流损耗快速评估的关键。

MSFEM的核心思路是在宏观尺度上采用粗网格离散计算区域,同时通过构造含有细尺度信息的富集函数表征单元内部的局部场量变化。如图1所示,对于包含大量微观结构的计算区域,FEM需在每个微观特征处进行精细剖分(图1(a)),而MSFEM可在宏观尺度上采用较粗网格进行离散(图1(b)),从而降低网格数量和系统自由度。对于叠片铁心涡流损耗评估问题,MSFEM可在较低自由度下保留局部场量信息,为后续涡流密度及涡流损耗密度计算提供场量基础。

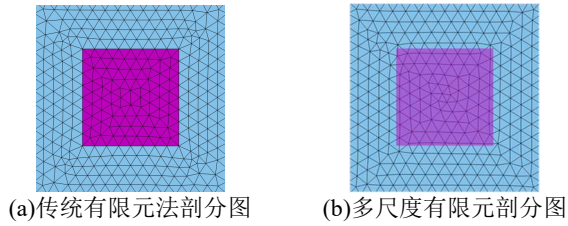


图 1 有限元与多尺度有限元剖分对比
Fig. 1 Comparison of meshing between FEM and MSFEM

在粗网格下, 部分单元内部可能包含多种材料。由于材料属性在界面处发生突变, FEM 采用的连续多项式形函数难以准确描述此类单元内场量的非光滑分布。为克服这一困难, MSFEM 通常基于单位分解法 (PUM) 构造近似解, 即在标准有限元基底上叠加局部富集项, 对材料界面附近和细尺度结构内部的解进行修正。其近似解的一般形式为:

$$u_h^{ms}(x) = \sum_I N_i(x) u_i + \sum_J \psi_j(x) \cdot u_j \quad (1)$$

其中, 右端第一项为宏观部分, I 为传统有限元节点集合, N_i 为传统有限元标准形函数, u_i 为节点未知自由度; 右端第二项为富集部分, J 为富集节点的集合, $\psi_j(x)$ 为富集函数, u_j 为附加自由度。

1.2 多尺度有限元法的单元分类与框架

MSFEM 允许材料分界面从单元内部穿过, 从而放松了传统有限元网格必须贴合材料边界的约束。对于叠片铁心这类含有大量薄层界面的结构, 该特性能够避免网格完全贴合每一层硅钢片与绝缘层边界。根据单元与材料界面的空间拓扑关系, 可将单元划分为三类, 如图 2 所示。

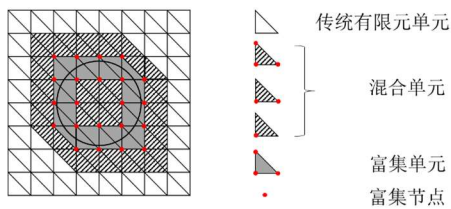


图 2 多尺度有限元单元分类
Fig. 2 Classification of multiscale element method

(1) 富集单元: 指被材料界面贯穿的单元, 需引入附加自由度以描述界面附近的局部场量变化;

(2) 混合单元: 指与富集单元相邻、虽未被界面贯穿但包含至少一个富集节点的单元;

(3) 标准有限元单元: 指不包含任何富集节点的单元, 其物理场计算完全遵循传统有限元格式。

通过上述分类, MSFEM 能够区分界面附近区域与普通区域, 仅在必要节点上引入附加自由度, 从而在控制整体计算规模的同时提高局部场量计算精度。

1.3 典型富集函数的构造方法

富集函数的构造是 MSFEM 的核心环节。对于变压器叠片铁心涡流损耗评估问题, 富集函数不仅需要描述材料界面处的场量非光滑特征, 还需要尽可能反映叠片内部由集肤效应引起的非线性场量分布, 以保证局部涡流密度及损耗密度计算的准确性。下文介绍两类典型富集函数构造方法: 基于叠片结构周期性假设的方法和基于材料界面几何识别的方法, 并分析其用于涡流损耗评估时的适用性与局限。

1.3.1 基于周期性假设的构造方法

对于具有严格周期性特征的密集薄层结构, 可利用周期内场分布的解析或半解析形式构造富集函数。以 Hollaus 等的工作^[15-18]为代表, 此类方法预先在单个周期内定义具有特定奇偶性的微尺度形函数, 将物理场近似解写为宏观平滑部分与周期波动部分的叠加。

典型的一阶多尺度近似解表达式可以写为:

$$\tilde{A} = A_0 + \phi_1 \begin{pmatrix} 0 \\ A_1 \end{pmatrix} + \nabla(\phi_1 \omega_1) \quad (2)$$

式中: A 表示矢量磁位; A_0 表示宏观磁场下矢量磁位部分, 对应传统有限元插值函数部分; ϕ_1 表示一种奇函数形的微尺度形函数, 通常取为周期内连续的分段线性函数; A_1 和 ω_1 为待求附加项。在此方法下, 右端第二项主要用于描述平行于叠片方向的涡流效应, 而右端第三项则旨在捕捉叠片端部的边缘效应。

该方法在叠片结构周期规整、集肤深度与叠片厚度处于相近量级时具有良好效果。然而, 当集肤效应显著、透入深度 δ 远小于叠片厚度时, 场量在叠片内部可能呈现剧烈非线性分布, 一阶微尺度形函数 ϕ_1 的逼近能力将受到限制。对于接缝、搭接、边缘和转角等非严格周期区域, 基于周期性假设构造的函数形式在直接推广时也可能受到限制。为提高强集肤效应工况下的计算精度, Hollaus 等进一步发展了更高阶的多尺度格式^[18], 形如:

$$\tilde{A} = A_0 + \phi_1 \begin{pmatrix} 0 \\ A_1 \end{pmatrix} + \nabla(\phi_1 \omega_1) + \phi_3 \begin{pmatrix} 0 \\ A_3 \end{pmatrix} + \nabla(\phi_3 \omega_3) + \phi_5 \begin{pmatrix} 0 \\ A_5 \end{pmatrix} + \nabla(\phi_5 \omega_5) \quad (3)$$

这种高阶格式能够改善局部场量的逼近精度, 但每增加一阶, 系统即需引入新的附加自由度, 导致计算规模随阶次增加而快速增大。在需要快速评估叠片铁心涡流损耗时, 该类方法仍面临计算效率与局部场量精度之间的权衡。

1.3.2 基于材料界面识别的构造方法

与基于周期性假设的方法不同, 基于材料界面识别的构造方法不预设结构的严格周期性, 而是通

过识别材料界面的空间位置来构造富集函数。其近似解形式可写为:

$$u^h = \underbrace{\sum_{i \in I} N_i u_i}_{\text{标准有限元近似 } u_{\text{FEM}}^h} + \underbrace{\sum_{j \in J} N_j \psi_j u_j}_{\text{富集项 } u_{\text{Enrich}}^h} \quad (4)$$

式中: 第一项表示基于有限元形函数 N_i 的传统有限元近似项 u_{FEM}^h ; 第二项表示富集项 u_{Enrich}^h , 仅定义在富集单元上, N_j 表示多尺度形函数, 通常可以选用与有限元一致的 N_i , ψ_j 为富集函数。

为实现对界面的精确定位, 引入距离水平集函数 Φ , 以其零等值面隐式描述材料分界面的几何位置。在此基础上, 富集函数 ψ 采用如下构造形式:

$$\psi = \sum_I N_I \cdot |\Phi_I| - \left| \sum_I N_I \cdot \Phi_I \right| \quad (5)$$

上述富集函数使近似解在穿越材料界面时允许梯度不连续, 从而反映不同材料属性突变对场分布的影响。该方法具有较好的几何通用性, 适用于材料界面与网格不一致的情况。然而, 这种主要基于界面几何信息的构造方式, 对叠片涡流场特征分布规律的显式利用仍不充分。当铁心叠片涡流场受集肤效应影响而在叠片厚度方向呈现强非线性变化时, 仅依赖界面几何信息的低阶富集函数可能难以准确刻画局部场量分布, 从而影响涡流损耗的计算精度。为此, Duan 等^[19]在该函数基础上, 将一阶形函数扩展为高阶形函数, 以提升局部逼近能力。

这种处理方式虽然能够改善计算精度, 但会导致附加自由度显著增加; 此外, 当结构中存在多个邻近界面时, 每个界面通常需要相应的水平集函数与富集函数描述, 计算复杂度进一步提高。由此可见, 基于材料界面识别的多尺度方法在通用性方面具有优势, 但其主要依赖高阶插值提高非线性逼近能力的方式, 仍面临精度与效率难以兼顾的问题。

综上, 现有多尺度方法虽能降低叠片铁心涡流问题的离散规模, 但富集函数构造仍是影响局部涡流密度及涡流损耗计算精度的关键。若富集函数未能有效反映叠片涡流场的物理分布规律, 则在强集肤效应等局部非线性区域中, 难以兼顾低自由度与高精度。因此, 有必要将叠片涡流场的物理先验信息引入富集函数构造过程。

2 新型多尺度有限元法的基本原理

上文分析表明, 基于材料界面识别的多尺度方法具有较好的几何通用性, 但其富集函数主要依据材料界面位置构造, 对叠片内涡流场所满足的物理分布规律利用不足。当集肤效应显著、局部场量变化剧烈时, 该类方法仍难以在低自由度条件下兼顾局部场量精度与涡流损耗评估精度。本章针对这一问题, 提出一种基于本征函数物理先验的富集函数高

精度构造策略, 为后续局部涡流密度及涡流损耗密度计算提供准确场量基础。

2.1 本征函数先验知识的理论依据

半解析法通常通过变量分离将定解问题转化为本征值问题, 求得满足控制方程和部分边界条件的本征函数序列, 并将物理场展开为本征函数的级数形式。盛剑霓等系统发展了电磁场与波分析中的半解析法理论, 并将其应用于恒定电场、恒定磁场、涡流场及高频波导等问题^[22-25]。相关研究表明, 对于不同类型的控制方程和边界条件, 本征函数可表现为三角函数、Bessel 函数、Legendre 函数或双曲函数等形式, 用以表征相应问题中的场量变化规律。这说明, 本征函数不仅具有数学展开意义, 也包含由控制方程和局部边界条件共同决定的物理分布信息。

与半解析法在整个求解域上构造全局本征函数序列不同, 本文将这一思想迁移至 MSFEM 的局部富集单元中: 不求解复杂全局边界下的完整本征值问题, 而是在单元层面选取能够反映局部场量变化规律的本征函数作为物理先验, 并将其嵌入富集函数构造过程。对于叠片铁心涡流问题, 场量在叠片厚度方向受集肤效应影响呈现明显非线性分布, 因此可将满足局部涡流场控制方程的双曲函数形式作为富集函数构造基础。具体的双曲余弦型本征函数将在第 3 章结合叠片涡流场控制方程进一步给出。

2.2 单位分解框架下的修正策略

PUM 最早由 Melenk 等^[26]和 Duarte 等^[27]提出, 基本的单位分解形式为:

$$u_h = \sum_I P_I^K \cdot \left[u_I + \sum_J u_J \cdot \psi \right] \quad (6)$$

式中: P_I^K 表示满足单位分解条件的 K 阶最小二乘形状函数; 富集函数 ψ 可以是任意形式的函数。Melenk^[26]已对该方法的收敛性进行了证明, 为基于 PUM 的富集近似空间构造提供了理论基础。

根据 2.1 节的分析, 对于给定的控制方程 (如涡流场中的 Helmholtz 方程), 可求解出其本征函数 $f(x)$ (如双曲函数形式), 用于表征该类问题中场量的局部变化规律。延续 1.3.2 节基于材料界面识别的构造框架, 若将该本征函数 $f(x)$ 作为基函数, 则可构造出符合物理场分布规律的富集函数形式:

$$\psi(x) = \sum_I f(x) \cdot |\Phi_I| - \left| \sum_I f(x) \cdot \Phi_I \right| \quad (7)$$

该构造形式的物理优势在于: 本征函数 $f(x)$ 承载了控制方程所规定的场量变化规律, 使富集函数不仅能够反映材料界面引起的场量非光滑特征, 还能够利用控制方程中蕴含的物理先验信息描述局部非线性场量分布。因此, 在不显著提高插值阶次的条件下,

该方法有望提高叠片内部及边缘集肤效应区域的局部场量计算精度。

然而, 直接采用 $f(x)$ 作为富集函数存在一个关键的技术问题: 本征函数在节点处的值一般不为零, 即 $f(x_i) \neq 0$ 。在 MSFEM 的单元分类框架下, 混合单元内的节点同时连接富集单元和标准有限元单元。若富集函数在节点处非零, 则混合单元内的标准有限元插值项与富集项之间会产生非期望的耦合, 破坏局部逼近的单位分解特性, 进而影响解的收敛性。因此, 必须对原始的本征函数进行修正, 使其在节点处归零以消除这种耦合。

为满足这一要求, 本文对 $f(x)$ 进行如下修正: 从其原始形式中减去由节点处形函数插值所构成的贡献项, 得到修正后的函数 $g(x)$:

$$g(x) = f(x) - \sum_{i=1}^m N_i(x) \cdot f(x_i) \quad (8)$$

式中: $f(x_i)$ 表示本征函数在第 i 个节点处的取值, m 为单元节点数。将修正后的 $g(x)$ 代入富集函数构造式(7), 得到修正后的富集函数 ψ_{new} :

$$\psi_{\text{new}}(x) = \sum_i g(x) \cdot |\Phi_i| - \left| \sum_i g(x) \cdot \Phi_i \right| \quad (9)$$

将修改后的富集函数代入式(4), 可得最终的近似解表达形式:

$$u^h = \underbrace{\sum_{i \in I} N_i u_i}_{\text{标准有限元近似 } u_{\text{FEM}}^h} + \underbrace{\sum_{j \in J} N_j \psi_{j, \text{new}} u_j}_{\text{富集项 } u_{\text{Enrich}}^h} \quad (10)$$

该修正模式的物理意义在于: 从原始解析本征函数中减去其在节点处的形函数插值, 使得 $\psi(x_i) = 0$ 对所有节点成立, 富集项严格限制在单元内部, 从而保证了富集函数的局部性。同时, 该修正不破坏单位分解条件, 因为形函数本身满足单位分解要求。换言之, 修正后的富集函数不再是本征函数的直接拷贝, 它专注于刻画标准形函数无法企及的场量变化细节。这正是本文方法能够以低阶形函数实现高精度局部逼近的根本原因。因此, 该修正策略能够在不显著增加自由度的前提下提高局部非线性场量刻画能力, 为下一章中叠片涡流场双曲余弦富集函数的构造, 以及后续局部涡流密度和涡流损耗密度计算奠定基础。

3 面向涡流损耗评估的新型多尺度有限元实现

3.1 涡流场控制方程

A, ϕ - A 法是求解涡流场问题中数值稳定性较好的方法^[28-29], 其中涡流区以矢量磁位 A 和标量电位 ϕ 为未知量, 非涡流区仅以矢量磁位 A 为未知量。该

方法将求解区域 V 划分为涡流区 V_1 、非涡流区 V_2 。在引入库伦规范后, 涡流场问题的控制方程可以写为:

$$\text{在 } V \text{ 内: } \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times A) - \nabla (\mu^{-1} \nabla \cdot A) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \nabla \phi = J_s \quad (11)$$

$$\text{在 } V_1 \text{ 内: } \nabla \cdot \left(-\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \nabla \phi \right) = 0$$

式中: J_s 表示源电流密度; μ 表示磁导率; σ 表示电导率。

正弦稳态涡流场可视为一般瞬态涡流场的特例, 此时电磁场方程如下:

$$\text{在 } V \text{ 内: } \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \dot{A}) - \nabla (\mu^{-1} \nabla \cdot \dot{A}) + j\omega\sigma \dot{A} + \sigma \nabla \dot{\phi} = \dot{J}_s \quad (12)$$

$$\text{在 } V_1 \text{ 内: } \nabla \cdot (-j\omega\sigma \dot{A} - \sigma \nabla \dot{\phi}) = 0$$

在 FEM 中, 可通过伽辽金法建立上述方程的有限元离散化方程。任意单元内可以构建近似表达式:

$$\dot{A} \approx \sum_{i=1}^m N_i \dot{A}_i, \quad \dot{\phi} \approx \sum_{i=1}^m N_i \dot{\phi}_i \quad (13)$$

此即为 FEM 的近似解插值格式。为简化记号, 下文省略复幅值上方圆点。对于叠片铁心涡流损耗评估而言, 上述场量解是后续计算涡流密度、局部涡流损耗密度及涡流损耗的基础。

3.2 原有富集函数的局限性分析

图 3 给出了一组平行排列的硅钢片叠片, 其一端由交流电流激励。由于叠片厚度方向的尺度远小于铁心整体尺寸, 该问题具有典型的多尺度特征。

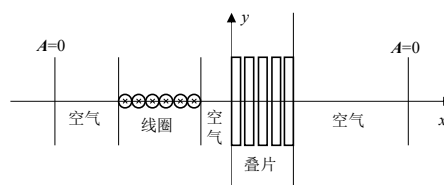


图 3 叠片铁心一维模型

Fig. 3 Model of laminated iron core in 1-D

在 MSFEM 框架下, 可将叠片区域选为富集区域。图 4 展示了一个典型的一维富集单元, 其内部包含硅钢片与绝缘/空气介质的材料分界面。采用 FEM 时, 单元节点必须落在此分界面上; 而 MSFEM 允许界面从单元内部穿过。

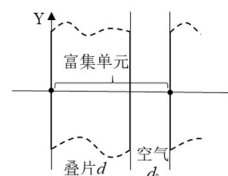


图 4 含叠片-空气界面的富集单元

Fig. 4 Enriched element containing lamination-air interface

在 Duan 等的方法框架下,采用一阶形函数配合式(5)构造的富集函数呈现线性特征。当磁场变化平缓时,该线性富集函数与单元内真实场分布规律基本吻合,能够有效补偿逼近误差。然而,当集肤效应显著、透入深度远小于叠片厚度时,场量沿叠片厚度方向呈剧烈非线性变化,单元内所需补偿的场量差异表现出强烈的非线性特征。此时,线性富集函数与该差异的形态不再匹配,难以有效补偿逼近误差,如图 5 所示。

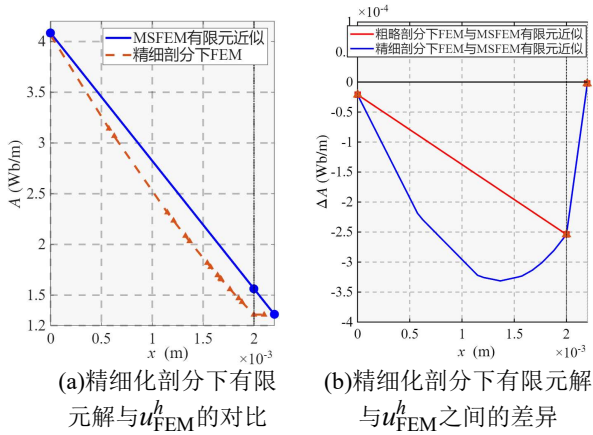


图 5 非线性场分布下原有富集函数的逼近缺陷
Fig. 5 Deficiency of the original enrichment function under nonlinear field distribution

3.3 高精度富集函数的构造

根据涡流场控制方程,对于图 3 所示的叠片结构,在本文二维平面问题中,线圈电流沿 z 方向,矢量磁位仅含 z 方向分量。在叠片表面磁场平行于硅钢片平面的条件下,可推导出矢量磁位 A_z 沿叠片厚度方向 (x 方向) 的分布服从双曲余弦函数形式:

$$A_z(x) = A_0 \frac{\cosh[\gamma(x-nd)]}{\cosh(\gamma \times nd)} \quad (14)$$

式中: A_0 表示叠片边界处矢量磁位大小; $\gamma = (1+j)/\delta$ 表示叠片材料的复传播常数; $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu\sigma)}$ 表示叠片的透入深度; d 表示叠片厚度; n 表示叠片数量。

由式(14)可知,叠片内矢量磁位的分布由本征函数 $\cosh(\gamma x)$ 刻画,其变化特征取决于复传播常数 γ 。根据前文提出的构造策略,将该本征函数作为先验信息引入富集函数构造。对于富集单元内被材料界面分隔的硅钢片区和绝缘/空气介质区,可根据水平集函数 Φ 的符号分别确定材料区域,并构造富集函数形如:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{raw}}(x) = & H(\Phi) \cdot \frac{\cosh[\gamma(x-nd)]}{\cosh(\gamma \times nd)} \\ & + H(-\Phi) \cdot \frac{\cosh[\gamma'(x-nd)]}{\cosh(\gamma' \times nd)} \end{aligned} \quad (15)$$

式中: γ 和 γ' 分别表示硅钢片和空气中的复传播常数; $H(\cdot)$ 表示 Heaviside 阶跃函数; 由水平集函数 Φ 的符号确定材料区域。

然而, ψ_{raw} 在节点处一般非零,不满足前文所述的局部性要求。按照式(8)的修正策略,从 ψ_{raw} 中剔除节点处形函数的贡献,得到修正后的富集函数 ψ_{pum} :

$$\psi_{\text{pum}}(x) = \psi_{\text{raw}}(x) - \sum_{i=1}^m N_i(x) \cdot \psi_{\text{raw}}(x_i) \quad (16)$$

经此修正, $\psi_{\text{pum}}(x_i) = 0$ 对所有节点成立,保证了富集函数的局部性。进一步,将 ψ_{pum} 代入通用框架,得到最终的新型富集函数 ψ_{new} :

$$\psi_{\text{new}}(x) = \sum_i \psi_{\text{pum}}(x) \cdot |\Phi_i| - \left| \sum_i \psi_{\text{pum}}(x) \cdot \Phi_i \right| \quad (17)$$

图 6 对比了新型富集函数与原有线性富集函数的分布形态。在富集单元内,新型富集函数呈现与双曲余弦规律相符的非线性分布特征,且与单元内真实场量差异的形态高度吻合。这表明,即使配合一阶形函数,新型富集函数仍能有效捕捉集肤效应导致的剧烈场变化。

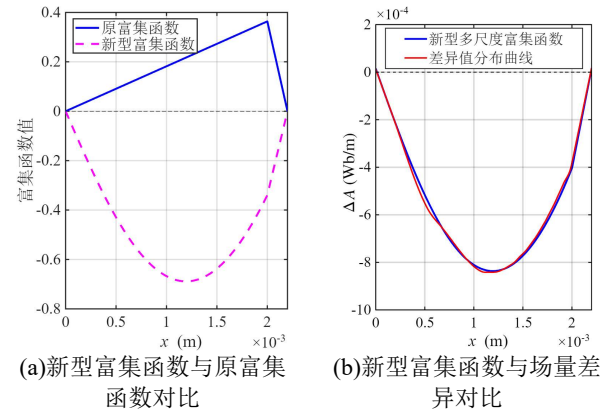


图 6 新型富集函数分布及其与场量差异的对比
Fig. 6 Distribution of the novel enrichment function and its comparison with field difference

图 7 进一步对比了同一富集单元内不同方法的矢量磁位计算结果。相比于原有 MSFEM,本文方法在保持粗网格剖分的条件下,显著提升了对叠片内部集肤效应区域场分布的描述精度。

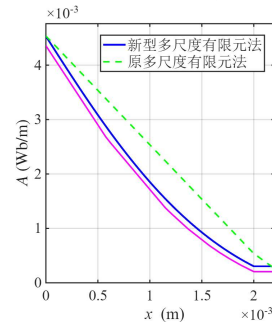


图 7 富集单元中不同方法计算结果对比
Fig. 7 Comparison of computational results using different methods in an enriched element

3.4 涡流密度与涡流损耗的计算方法

在获得矢量磁位与标量电位后, 可进一步计算导电区域内的电场强度和涡流密度。对于正弦稳态问题, 电场强度 $\mathbf{E}$ 可表示为:

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi \quad (18)$$

相应的涡流密度 $\mathbf{J}_e$ 为:

$$\mathbf{J}_e = \sigma\mathbf{E} = -\sigma(j\omega\mathbf{A} + \nabla\phi) \quad (19)$$

式中: ω 表示角频率; $\mathbf{J}_e$ 表示涡流密度。在叠片区域, 单位体积平均涡流损耗密度 p_e 可按焦耳损耗计算为:

$$p_e = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{E}^*) = \frac{|\mathbf{J}_e|^2}{2\sigma} \quad (20)$$

式中: 上标*表示复共轭。进一步, 对叠片区域积分可得总涡流损耗 P_e :

$$P_e = \int_{\Omega_{Fe}} p_e d\Omega \quad (21)$$

对于二维模型, 上式可理解为单位轴向长度下的涡流损耗; 若考虑实际轴向长度, 可在积分结果基础上乘以相应模型厚度或等效长度。由此, 本文方法可基于局部场量解进一步评估涡流损耗密度及总涡流损耗, 为第 4 章算例中的损耗误差对比提供依据。

4 新型多尺度有限元法的算例验证

为验证新型 MSFEM 在局部场量计算及涡流损耗评估中的有效性, 计算如图 8 所示的二维线圈-叠片问题。求解域 D 中含两个励磁线圈, 匝数均为 300 匝, 分别通入频率 50 Hz、有效值 10 A、方向相反的交流电流。导线电导率 $5.7143 \times 10^7 \text{ S/m}$, 净截面积 13.04 mm^2 。硅钢片采用线性材料参数: 叠片厚度 $d=0.3 \text{ mm}$, 气隙 $d_0=0.03 \text{ mm}$, 相对磁导率为 1 000, 电导率 $2.22 \times 10^6 \text{ S/m}$, 共 20 片叠片。本文采用逐层精细剖分的传统有限元法计算结果作为参考解, 以下简称 FEM 参考解。

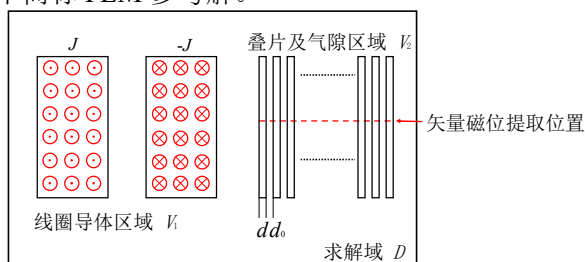


图 8 二维线圈-叠片问题模型

Fig. 8 2D coil-lamination problem model

本文从一维叠片问题中提取厚度方向的双曲余弦先验, 并将其用于二维线圈-叠片模型; 其合理性在于, 叠片厚度方向是局部非线性场量变化的主要来源, 而平行叠片方向的变化可由粗网格描述。后文云图和截线结果将进一步说明该方法的合理性。

图 9 对比了原有富集函数与新型富集函数在

一富集单元内的分布。可以看出, 原有富集函数仅呈线性变化, 而新型富集函数呈现与集肤效应相符的非线性分布特征。

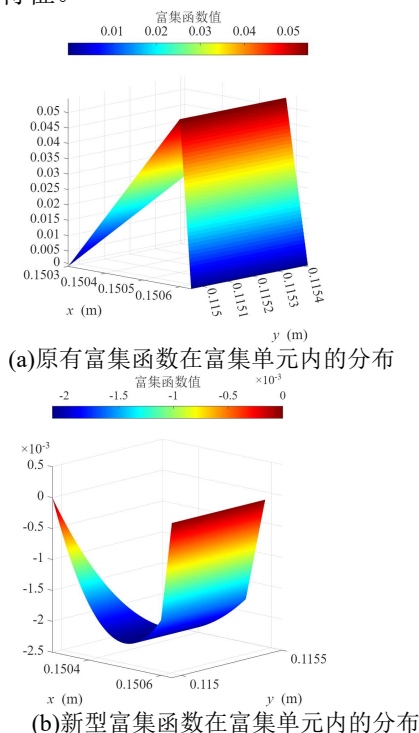


图 9 富集单元内不同富集函数对比

Fig. 9 Distribution of different enrichment functions in an enrichment element

图 10 展示了 FEM 与 MSFEM 对叠片区域的不同剖分方式。FEM 需在每个材料界面处布设节点, 网格细密; MSFEM 则允许界面穿过单元内部, 可采用宏观粗网格降低离散规模。

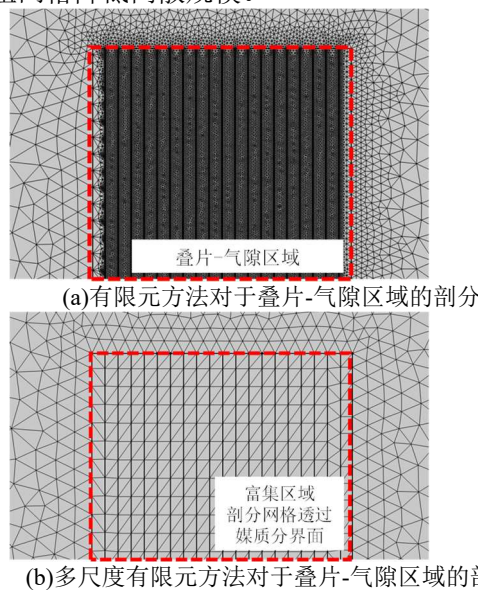


图 10 不同方法下叠片-气隙区域的网格剖分对比

Fig. 10 Comparison of mesh discretization in the lamination-air gap region using different methods

分别采用原有 MSFEM 与新型 MSFEM 在粗网

格下进行计算,不同方法的计算资源对比如表 1 所示。由表 1 可知,本文方法自由度较 FEM 降低 97.41%,计算时间从 628 s 缩减至 51 s;较原有 MSFEM 增加 18 s。其新增耗时主要来自矩阵组装阶段,原因是新型富集函数表达式较原有线性函数更复杂。

表 1 不同方法的网格剖分规模、自由度数及计算时间对比

Table 1 Comparison of mesh size, degrees of freedom, and computational time for different methods

项目	FEM	原有 MSFEM	新型 MSFEM	节省比例
节点数	814 748	16 365	16 365	97.99%
单元数	1 629 434	32 668	32 668	97.99%
自由度数	1 629 434	42 135	42 135	97.41%
计算时间	628 s	33 s	51 s	-

图 11 给出了新型 MSFEM 计算得到的矢量磁位分布云图及叠片区域局部放大图。可以看出,本文方法能够在粗网格条件下获得连续、稳定的全场解,并在叠片区域保持对局部场量变化的描述能力。

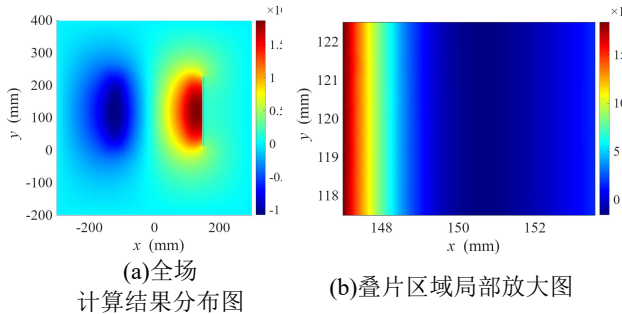


图 11 新型 MSFEM 计算得到的矢量磁位分布云图

Fig. 11 Contours of magnetic vector potential computed by the novel MSFEM

沿图 8 所示红色虚线段提取矢量磁位随 x 坐标的变化曲线,结果如图 12 所示。可以看出,本文方法所得曲线与 FEM 参考解的变化趋势一致,而原有 MSFEM 在叠片内部及边缘区域存在明显偏差。图 13 给出了两种方法相对于 FEM 参考解的误差分布。其中绝对误差按 $|A_i^h - A_i^{\text{ref}}|$ 计算。为评价富集区域内局部场量计算精度,采用节点平均相对误差:

$$\bar{e}_A^{\text{rel}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{A_i^h - A_i^{\text{ref}}}{A_i^{\text{ref}}} \right| \times 100\% \quad (22)$$

式中: A_i^h 表示第 i 个统计节点处待评价方法计算得到的矢量磁位; A_i^{ref} 为 FEM 参考解, N 为统计节点数。在本文采用的极低网格密度下,叠片-气隙区域仅由一层单元离散,难以准确刻画材料参数突变及边缘集肤效应引起的非线性场量变化。因此,原有 MSFEM 在该粗网格条件下局部场量计算精度不足,富集区域平均相对误差为 274.35%;相比之下,本文方法的平均相对误差为 3.30%,仅为原有 MSFEM 的 1.20%。结果表明,引入本征函数先验信息的新富

集函数能够在粗网格条件下提高叠片内部及边缘区域的局部场量计算精度。

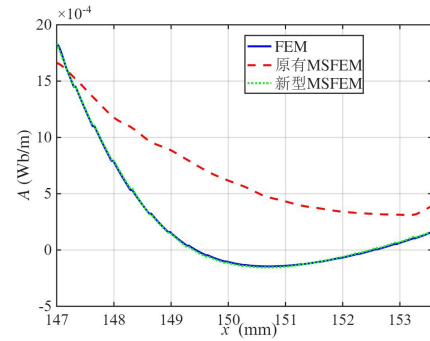


图 12 不同方法下矢量磁位沿虚线分布曲线对比
Fig. 12 Comparison of Magnetic Vector Potential Distribution along the Dashed Line Obtained by Different Methods

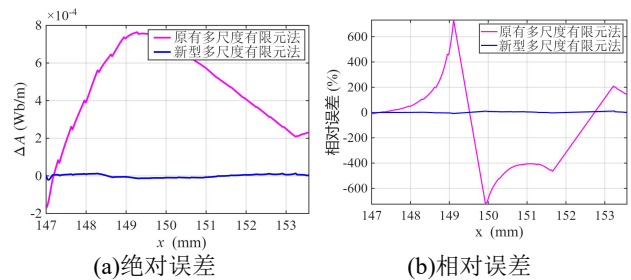


图 13 原有 MSFEM 和新型 MSFEM 相对于 FEM 参考解的误差对比

Fig. 13 Error comparison among the original MSFEM, the novel MSFEM, and the fine-mesh FEM reference solution

为进一步从全局角度衡量方法精度,引入 L^2 误差指标:

$$\|e\|_{L^2} = \sqrt{\sum_K \int_K (u_h - u_{\text{ref}})^2 dK} \quad (23)$$

式中: K 表示单元编号, u_h 和 u_{ref} 分别表示待评价方法与 FEM 参考解在单元内的矢量磁位模值分布。原有 MSFEM 的 L^2 误差为 4.82×10^{-4} ,本文方法降至 5.82×10^{-6} ,精度提升约两个数量级。

为验证所提方法在涡流损耗评估中的有效性,进一步根据第 3.4 节给出的涡流损耗计算方法,对叠片导电区域的单位长度涡流损耗进行计算。对比 FEM 参考解,不同方法的损耗计算结果如表 2 所示。

表 2 不同方法的单位长度涡流损耗对比

Table 2 Comparison of eddy-current loss per unit length using different methods

方法	单位长度涡流损耗/($\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$)	相对误差
FEM 参考解	48.832	-
原有 MSFEM	131.4931	169.28%
新型 MSFEM	46.1594	5.47%

由表 2 可知,在相同粗网格条件下,原有 MSFEM 的单位长度涡流损耗误差为 169.28%,而本文方法降至 5.47%,说明局部场量精度的提升能够有效改善涡流损耗评估结果。

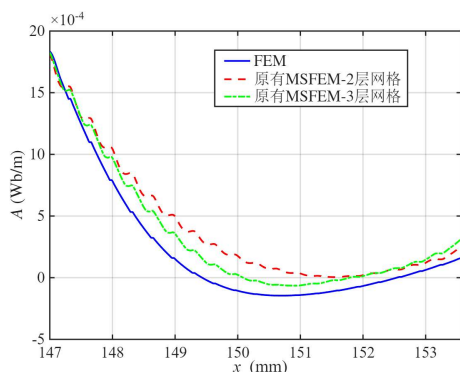


图 14 加密网格下原有 MSFEM 的矢量磁位计算结果
Fig. 14 Computational results of the original MSFEM with mesh refinement

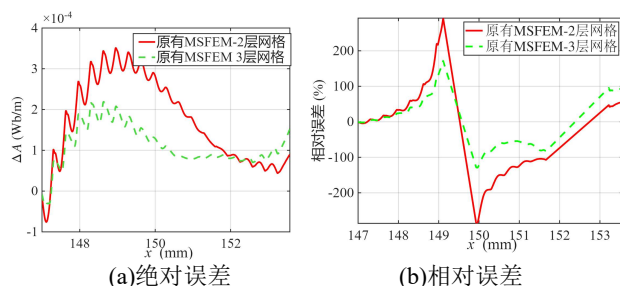


图 15 加密网格下原有 MSFEM 的误差分布曲线
Fig. 15 Error distribution curves of the original MSFEM with mesh refinement

为进一步说明本文方法的优势并非仅来自网格加密,对原有 MSFEM 进行逐步加密计算。初始剖分中每层叠片-气隙仅一层单元,如图 10(b)所示;二层剖分时,单元数由 32 668 增至 118 666,计算时间增至 113 s,相对于 FEM 参考解的矢量磁位平均相对误差降至 96.27%,单位长度涡流损耗为 67.148 W/m,相对误差为 37.51%;三层剖分时,单元数进一步增至 216 320,计算时间增至 198 s,矢量磁位平均相对误差降至 57.02%,单位长度涡流损耗为 55.842 W/m,相对误差为 14.36%。可见,网格加密能够降低原有 MSFEM 的场量误差和损耗误差,但其精度仍低于本文方法,且计算时间明显增加。原有 MSFEM 在二层和三层加密网格下的矢量磁位计算结果及误差分布分别如图 14 和图 15 所示。

综上,本文方法在相同粗网格下显著提高了叠片区域局部场量和涡流损耗计算精度,并兼顾了计算效率与损耗评估精度。

5 结论与展望

本文面向变压器叠片铁心涡流损耗快速、准确评估需求,针对原有 MSFEM 因富集函数缺乏物理针对性而导致局部场量及损耗计算精度不足的问题,提出了一种基于本征函数先验知识的快速高精度多尺度计算方法。通过将涡流场矢量磁位沿叠片厚度方向的双曲余弦分布规律引入多尺度框架,结合水平集函数与单位分解法,构造了能够在低阶形函数

条件下有效刻画强集肤效应区域场量非线性变化的新型富集函数。

二维线圈-叠片模型算例表明:以传统有限元法在精细剖分下的计算结果为基准,所提方法在网格节点数和自由度分别减少 97.99% 和 97.41% 的条件下,将计算时间由 628 s 降至 51 s,缩短 91.88%;与原有 MSFEM 相比,在相同粗网格条件下,所提方法使矢量磁位平均相对误差降低 98.80%,单位长度涡流损耗相对误差降低 96.77%,L2 误差降低 98.79%。与原有 MSFEM 三层加密结果相比,所提方法仍可在更短计算时间内获得更低的场量误差和损耗误差。结果表明,所提方法能够在较低网格密度下同时降低计算规模、缩短计算时间并提高局部场量计算精度与涡流损耗评估精度,可为变压器叠片铁心涡流损耗快速评估及精细化电磁分析提供有效计算工具。

后续工作将进一步面向三维变压器叠片铁心模型,研究复杂接缝、搭接和转角结构下的涡流损耗评估问题,并考虑非线性磁化特性、复杂激励以及电磁-热耦合条件下的适用性。

参考文献:

- [1] 工业和信息化部办公厅,市场监管总局办公厅,国家能源局综合司. 关于印发《变压器能效提升计划(2021-2023 年)》的通知:工信厅联节(2020)69 号[EB/OL]. (2021-01-15) [2026-06-21]. https://www.miit.gov.cn/zwgk/zcwj/wjfb/tz/art/2021/art_fd74b3be8f054a8792bba c2d6a65cef7.html.
- [2] 国家市场监督管理总局,国家标准化管理委员会. 电力变压器能效限定值及能效等级: GB 20052—2024[S]. 北京: 中国标准出版社, 2024.
- [3] Harlow J H. 电力变压器工程[M]. 保定天威保变电气股份有限公司,译. 3 版. 北京: 机械工业出版社, 2016.
- [4] 国家市场监督管理总局,国家标准化管理委员会. 电力变压器 第 7 部分: 油浸式电力变压器负载导则: GB/T 1094.7—2024[S]. 北京: 中国标准出版社, 2024.
- [5] 谢裕清, 李琳, 宋雅吾, 等. 油浸式电力变压器绕组温升的多物理场耦合计算方法[J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(21): 5957-5965.
Xie Yuqing, Li Lin, Song Yawu, et al. Multi-physical field coupled method for temperature rise of winding in oil-immersed power transformer[J]. Proceedings of the CSEE, 2016, 36(21): 5957-5965.
- [6] Frlić S, Trkulja B, Žiger I. Calculation of the eddy current losses in a laminated open-type transformer core based on the $A,T-A$ formulation[J]. Applied Sciences, 2021, 11(23): 11543.
- [7] Frlić S, Trkulja B, Drandić A. Eddy current losses in power voltage transformer open-type cores[J]. COMPEL, 2023, 42(5): 1039-1051.
- [8] Nakata T, Takahashi N, Kawase Y. Magnetic performance of step-lap joints in distribution transformer cores[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1982, 18(6): 1055-1057.
- [9] 王坚, 林鹤云, 房淑华, 等. 利用等效电导率进行叠片铁心涡流场分析的有效性和精确性[J]. 中国电机工程学报, 2012, 32(27): 162-168.
Wang Jian, Lin Heyun, Fang Shuhua, et al. Validity and accuracy of eddy current field analysis of laminations by

- introducing equivalent conductivities [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2012, 32(27): 162-168.
- [10] 张天淼, 李琳. 利用等效复磁导率幅值对硅钢叠片铁心的改进均质化方法[J]. *电工电能新技术*, 2024, 43(3): 56-64.
- Zhang Tianmiao, Li Lin. Improved homogenization method of silicon steel laminated core using equivalent complex permeability amplitude [J]. *Advanced Technology of Electrical Engineering and Energy*, 2024, 43(3): 56-64.
- [11] Dular P, Gyselinck J, Krähenbühl L. A time-domain finite element homogenization technique for lamination stacks using skin effect sub-basis functions [J]. *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 2006, 25(1): 6-16.
- [12] Frlić S, Drandić A, Trkulja B. Numerical homogenization for the calculation of eddy current losses in a laminated open core [J]. *IEEE Access*, 2024, 12: 169163-169169.
- [13] Jurković Z, Trkulja B, Petrović K, et al. Quasi-3D calculation of stray losses in outer lamination stack of power transformer core [J]. *IEEE Access*, 2025, 13: 119279-119291.
- [14] Hou T Y, Wu Xiaohui. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media [J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, 134(1): 169-189.
- [15] Hollaus K, Schöberl J. Some 2-D multiscale finite-element formulations for the eddy current problem in iron laminates [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2018, 54(4): 1-16.
- [16] Hollaus K, Schöberl J. Multi-scale FEM and magnetic vector potential A for 3D eddy currents in laminated media [J]. *COMPEL*, 2015, 34(5): 1598-1608.
- [17] Schöbinger M, Steentjes S, Schöberl J, et al. MSFEM for the eddy current problem in a laminated core including hysteresis [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2019, 55(8): 1-9.
- [18] Schöbinger M, Hollaus K. A novel MSFEM approach based on the a-formulation for eddy currents in iron sheets [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2023, 59(5): 1-4.
- [19] Duan Nana, Xu Weijie, Wang Shuhong, et al. An improved XFEM with multiple high-order enrichment functions and low-order meshing elements for field analysis of electromagnetic devices with multiple nearby geometrical interfaces [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2015, 51(3): 1-4.
- [20] Duan Nana, Xu Weijie, Wang Shuhong, et al. Current distribution calculation of superconducting layer in HTS cable considering magnetic hysteresis by using XFEM[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2018, 54(3): 1-4.
- [21] Wang Guolin, Wang Shuhong, Duan Nana, et al. Extended finite-element method for electric field analysis of insulating plate with crack [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2015, 51(3): 1-4.
- [22] 盛剑霓. 电磁场与波分析中半解析法的理论方法与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [23] 马齐爽, 盛剑霓. 用通用解析法求解二维无界场的电场分布[J]. *西安交通大学学报*, 1993, 27(6): 35-40.
- Ma Qishuang, Sheng Jianni. A general analytical method for solving 2-D unbounded electrostatic field [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 1993, 27(6): 35-40.
- [24] 马齐爽, 盛剑霓. 通用级数法求解轴对称磁场[J]. *中国电机工程学报*, 1994, 14(5): 50-55.
- Ma Qishuang, Sheng Jianni. Solving axisymmetric magnetic field by a general series method [J]. *Proceedings of the CSEE*, 1994, 14(5): 50-55.
- [25] 闫照文, 王恒利, 盛剑霓. 基于分域解的新型等效源法[J]. *西安交通大学学报*, 1999, 33(4): 17-20.
- Yan Zhaowen, Wang Hengli, Sheng Jianni. Refined equivalent source method using subregion solution[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 1999, 33(4): 17-20.
- [26] Melenk J M, Babuška I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1/4): 289-314.
- [27] Duarte C A, Oden J T. An h - p adaptive method using clouds [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1): 237-262.
- [28] 王金铭. 工程电磁场耦合问题分析的若干数值技术研究[D]. 沈阳: 沈阳工业大学, 2006.
- [29] 谢德馨. 三维涡流场的有限元分析[M]. 北京: 机械工业出版社, 2001.

(编辑 刘杨 陶晴)